名古屋創　q差分パンルヴェ τ函数のフーリエ展開について

黒木玄記

2018-05-07 東北大学数学教室談話会

Painlevé 方程式

19世紀　楕円函数や超幾何函数をこえる特殊函数を作りたい

2nd-order ODE の解で作りたい.

動く分岐点を持たないという条件を課す.

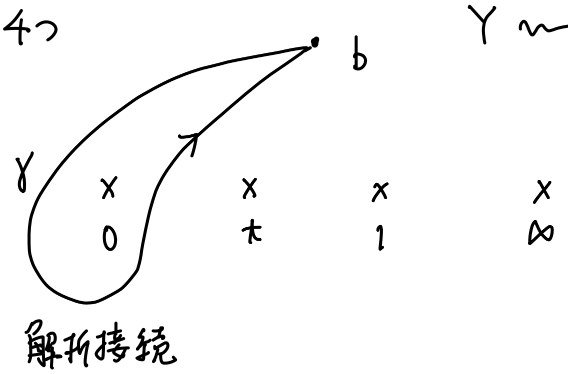
例　$\dfrac{dy}{dt} = y^{1+k}$　$(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0, \pm 1)$　　$y' = k^{-\frac{1}{k}-1}(c-t)^{-\frac{1}{k}-1} = y^{1+k}$

解は　$y(t) = k^{-\frac{1}{k}}(c-t)^{-\frac{1}{k}}$　$(c \in \mathbb{C})$.　□

モノドロミー保存変形の方程式

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t}\right)Y,\quad A_i : 2\times 2 \text{ 行列}$$

特異点は4つ



解析接続

$Y \rightsquigarrow Y_\gamma = Y M_\gamma$

モノドロミー行列 M_γ

モノドロミー保存変形とは M_γ $(\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,t,1\}, b))$ が t によらないように A_i 達を変形すること. その条件は A_i の成分の微分方程式で書ける. その微分方程式として Painlevé VI 方程式 P_{VI} が現れる.

$$\boxed{P_{\mathrm{I}} : \frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + t}$$

右辺の t を $-\frac{g_2}{2}$ でおきかえた $\frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 - \frac{g_2}{2}$ は Weierstrass の $\wp$ 函数のみたす

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

から得られる これの両辺を t で微分して, $2\frac{dy}{dt}$ で両辺をわると $\frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 - \frac{g_2}{2}$ が得られる.

Weierstrass の $\wp$ 函数は $\wp(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\log\sigma(t)$ と書ける ここで $\sigma(t)$ は Weierstrass の σ 函数である.

P_{I} の τ 函数は P_{I} の解 $\lambda(t)$ から $\lambda(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\log\tau(t)$ で定められる函数である.

P_{VI} の場合には線形問題の基本解 $Y(t,x)$ についてよくわかれば, その τ 函数についてもよくわかる

以上は楕円函数と Painlevé 方程式の関係.
次に超幾何との関係.

超幾何との関係

Gauss $\longrightarrow$ Kummer $\longrightarrow$ Bessel $\longrightarrow$ Airy

$(0,1,\infty)$ $\quad 1\to\infty \quad$ $(0,\infty^2)$

Kummer $\longrightarrow$ Hermite-Weber $\longrightarrow$ Airy

$(\theta_0,\theta_1,\theta_t,\theta_\infty)$

$\tau_{VI} \longrightarrow \tau_{V} \longrightarrow \tau_{III} \longrightarrow \tau_{II} \longrightarrow \tau_{I}$

$(0,1,\infty)$ $\quad 1\to\infty \quad$ $(0,\infty^2)$

$\tau_{V} \longrightarrow \tau_{IV} \longrightarrow \tau_{II}$

特殊化

この図式のようにPainlevé方程式は超幾何微分方程式を含んでいる

[Jimbo, 1982]

$$\mathrm{tr}(M_0 M_t) = 2\cos(2\pi\sigma), \quad M_i = M_{\gamma_i}$$

$$\tau_{VI}(t) = t^{\sigma^2-\theta_0^2-\theta_t^2}\left(1 + \frac{(\theta_0^2-\theta_t^2-\sigma^2)(\theta_\infty^2-\theta_1^2-\sigma^2)}{2\sigma^2}t - \sum_{\varepsilon=\pm1} \hat{s}^{\varepsilon} \times ▨\, t^{1+2\varepsilon\sigma} + \cdots\right)$$

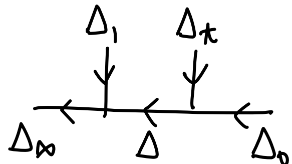
$t=0$での展開

モノドロミーデータ上のPoisson構造の正準座標をとって…

[Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 1984]

$$\langle \Delta_\infty | \Phi^{\Delta_1}_{\Delta_\infty,\Delta}(1)\, \Phi^{\Delta_t}_{\Delta,\Delta_0}(t) | \Delta_0 \rangle$$

これを後で



と書く

$$= t^{\Delta-\Delta_t-\Delta_0}\left(1 + \frac{(\Delta+\Delta_t-\Delta_0)(\Delta+\Delta_1-\Delta_\infty)}{2\Delta}t + \cdots\right)$$

$c=1$のとき, $\Delta_0 = \theta_0^2, \ldots$ と書く習慣があった. 上と一致しているように見える!!!

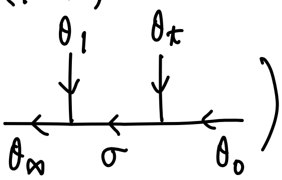
[Gamayun-Iorgov-Lisovyy 2012] の予想

$\tau_{VI}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n C(\vec{\theta},\sigma+n)\,\mathcal{F}(\vec{\theta},\sigma+n,t)$ と書ける。 ここで、 $\vec{\theta}=(\theta_0,\theta_t,\theta_1,\theta_\infty)$,

$$C(\vec{\theta},\sigma) = \frac{G(1+\theta_t+\theta_0+t)\,G\cdots G}{G(1+2\sigma)\,G(1-2\sigma)},$$ ← G が8個

$G(x+1)=\Gamma(x)G(x)$, $G(1)=1$,

$\mathcal{F}(\vec{\theta},\sigma,t) = \Big($ c=1 の



$\Big)$

Nekrasov function 具体的に書ける。

ここも証明は不完全

$$= t^{\sigma^2-\theta_t^2-\theta_0^2}(1-t)^{2\theta_0\theta_t}\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{Y}} Z_{\lambda,\mu}(\vec{\theta},\sigma)\,t^{|\lambda|+|\mu|}$$

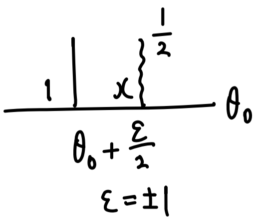
[Alday-Gaiotto-Tachikawa 2009] Young 図形 収束が証明されていない

□

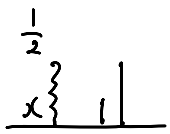
CFT を用いた"証明"

[Iorgov-Lisovyy-Teschner 2015]

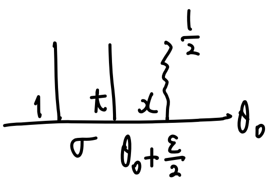
Fact



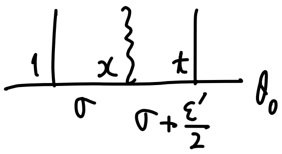
$= {}_2F_1(*,x)$, $|x|<1$



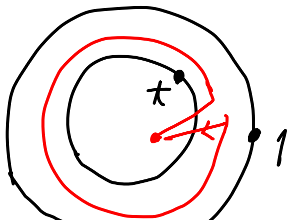
$= {}_2F_1(*,\frac{1}{x})$. $|x|>1$. □



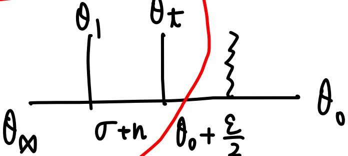
$= \sum_{\varepsilon'=\pm1}$



$B_{\varepsilon'\varepsilon}$



$\sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$



が P_{VI} の基本解を与える。

τ 関数になる。

τ_V, τ_{III} at $t=0$ [GIL 2013]

τ_V, τ_{IV} at $t=i\infty$ [Lisovyy-N-Roussillon 2018?]

Nagoya

q-P_{VI} : P_{VI} の q 差分化

τ_{VI} の q-analogue を次で定める:

$$\tau[\vec{\theta},s,\sigma,t] := \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n t^{(\sigma+n)^2-\theta_t^2-\theta_0^2} \frac{G_q\cdots G_q}{G_q G_q} \times Z[\vec{\theta},\sigma+n,t].$$

[Awata-Feigin-Shiraishi 2012]

$$Z=\sum_{(\lambda_+,\lambda_-)\in Y^2} t^{|\lambda_\pm|}\prod_{\varepsilon,\varepsilon'} N_{\phi,\lambda_{\varepsilon'}}\left(q^{\varepsilon\theta_\infty-\theta_1-\varepsilon'\sigma}\right)$$

$$N_{\lambda,\mu}(u)=\prod_{\square\in\lambda}\left(1-q^{-\ell_\lambda(\square)-a_\mu(\square)-1}u\right)\times\prod_{\square\in\mu}\left(1-q^{\cdots}\right)$$

さらに,

$\tau_1=\tau[\theta_\infty+\frac{1}{2}\cdots]$, $\tau_2=\tau[\theta_\infty-\frac{1}{2},\cdots]$, $\tau_3=\tau[\theta_0+\frac{1}{2},\sigma+\frac{1}{2},\cdots]$, $\tau_4=\tau[\theta_0-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2},\cdots]$

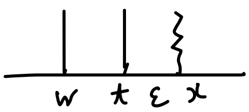
とおく.

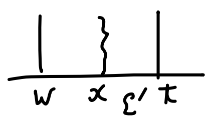
Theorem (Jimbo-Nagoya-Sakai 2017)

$$y=q^{-\theta_1-1}t\frac{\tau_3\tau_4}{\tau_1\tau_2},\quad z=\frac{\underline{\tau_1}\,\tau_2-\tau_1\,\underline{\tau_2}}{q^{\frac{1}{2}+\theta_\infty}\,\underline{\tau_1}\,\tau_2-q^{\frac{1}{2}-\theta_\infty}\,\tau_1\,\underline{\tau_2}}$$

は q-P_{VI} の解になる. □

Idea



$= \sum_{\varepsilon'=\pm1}$


$B_{\varepsilon'\varepsilon}$ を直接計算で示す.

具体的に書けているので両辺を比較できなくもない.
組合せ論的にがんばって計算する. □

Rem. τをうまく非可換化すると, 量子q-Painlevé ([Hasegawa 2007], [Kuroki 2012]) のτ函数が得られるという予想がある. ([Bershtein-Gavrylenko-Marshakov 2017])
量子 qP_{III} で予想をたてている

モノドロミーデータの空間の Poisson 構造はきれいに量子化(非可換化)できる. □

質問 量子qP_{VI} の場合の予想はあるのか? **回答** まだない.